

# Propagation de la 2-birationalité

par

Claire BOURBON & Jean-François JAULENT

**Résumé.** Nous étudions la propagation de la 2-birationalité dans les 2-extensions de corps de nombres. Nous prouvons que pour toute extension quadratique totalement imaginaire 2-birationnelle  $L$  d'un corps de nombres 2-rationnel totalement réel  $K$ , la propagation de la 2-birationalité par 2-extension de  $K$  n'est possible, à composition près par une 2-extension cyclotomique, que dans le cas quadratique. Nous la caractérisons complètement en termes de ramification modérée ce qui permet de construire des tours infinies de telles 2-extensions.

**Abstract.** Let  $L/K$  be a 2-birational CM-extension of a totally real 2-rational number field. We characterize in terms of tame ramification totally real 2-extensions  $K'/K$  such that the compositum  $L' = LK'$  is still 2-birational. In case the 2-extensions  $K'/K$  is linearly disjoint from the cyclotomic  $\mathbb{Z}_2$ -extension  $K^c/K$ , we prove that  $K'/K$  is at most quadratic. In the other hand we construct infinite towers of such 2-extensions.

## 1 Introduction

La notion de corps  $S$ -rationnel a été introduite dans [8], en liaison avec les résultats de [13], pour généraliser la notion de corps de nombres  $\ell$ -rationnel rencontrée implicitement dans des contextes variés par plusieurs auteurs puis explicitement définie et étudiée par [11] d'une part et [4] d'autre part (cf. [7]). Rappelons ce dont il s'agit : si  $\ell$  est un nombre premier et  $S$  un sous-ensemble non vide de l'ensemble  $Pl_K^\ell$  des places de  $K$  au-dessus de  $\ell$ , on dit que le corps de nombres  $K$  est  $S$ -rationnel lorsque le groupe de Galois  $\mathcal{G}_K = \text{Gal}(M'/K)$  de sa pro- $\ell$ -extension (galoisienne)  $\ell$ -ramifiée maximale est le pro- $\ell$ -produit libre

$$(i) \quad \mathcal{G}_K \simeq \left( \bigstar_{\substack{\mathfrak{p}|\ell\infty \\ \mathfrak{p} \notin S}} \mathcal{G}_{K_{\mathfrak{p}}} \right) \star \mathcal{F}$$

des groupes de Galois locaux  $\mathcal{G}_{K_{\mathfrak{p}}} = \text{Gal}(\bar{K}_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}})$  respectivement attachés aux pro- $\ell$ -extensions maximales  $\bar{K}_{\mathfrak{p}}$  des complétés  $K_{\mathfrak{p}}$  de  $K$  aux places réelles ou  $\ell$ -adiques qui ne sont pas dans  $S$ , et d'un pro- $\ell$ -groupe libre  $\mathcal{F}$  ; dans ce cas, le nombre  $f$  de générateurs de  $\mathcal{F}$  est donné par la formule

$$(ii) \quad f = d - r - c - l + s + 1,$$

où  $d$  est la somme des degrés locaux  $d = \sum_{\mathfrak{l} \in S} [K_{\mathfrak{l}} : \mathbb{Q}_{\ell}]$  et  $r, c, l, s$  sont respectivement les nombres de places réelles, complexes,  $\ell$ -adiques ou dans  $S$  de  $K$  (cf. [8], th 2.7). Lorsque  $S$  est un singleton  $\{\mathfrak{l}\}$ , on parle de corps  $\mathfrak{l}$ -rationnel et si  $Pl_K^\ell$  est lui même un singleton, on dit tout simplement que  $K$  est  $\ell$ -rationnel.

Dans ce dernier cas (*i.e.* pour  $l = s = 1$ ), la formule (ii) ci-dessus donne  $f = c + 1$ ; et la condition (i) affirme que  $\mathcal{G}_K$  est le pro- $\ell$ -produit libre d'un pro- $\ell$ -groupe libre de dimension  $c + 1$  (qui s'identifie au groupe de Galois de la sous-extension  $\infty$ -décomposée maximale  $M/K$  de  $M'/K$ ) et des  $r$  sous-groupes de décomposition attachés aux places réelles de  $K$ . Lorsque le corps  $K$  contient en outre les racines  $\ell$ -ièmes de l'unité, ceci a lieu si et seulement si le  $\ell$ -groupe  $\mathcal{C}\ell'_K$  des  $\ell$ -classes de diviseurs de  $K$  (*i.e.* le quotient du  $\ell$ -groupe des classes d'idéaux prises au sens restreint par le sous-groupe engendré par la classe de l'idéal premier au dessus de  $\ell$ ) est trivial (*cf. e.g.* [7]), ce qui s'écrit :

$$(iii) \quad \mathcal{C}\ell'_K = 1,$$

de sorte que la notion de  $\ell$ -rationalité coïncide alors avec celle de  $\ell$ -régularité introduite par Kummer dans l'étude des corps cyclotomiques  $\mathbb{Q}[\zeta_\ell]$ .

La question de la propagation de la  $S$ -rationalité dans une  $\ell$ -extension  $L/K$  de corps de nombres a été complètement résolue dans [8] pour les  $\ell$  premiers impairs. Pour  $\ell = 2$  et  $L/K$  quadratique il peut arriver que le corps de base  $K$  soit  $\mathfrak{l}$ -rationnel en une place 2-adique décomposée dans l'extension  $L/K$  et que  $L$  soit  $\mathfrak{l}$ -rationnel en chacune des deux places au-dessus de  $\mathfrak{l}$ ; on dit alors que le corps  $L$  est *birationalnel*. Le passage de la 2-rationalité à la 2-birationalité dans une 2-extension  $L/K$  a été complètement traité dans [9] pour  $K$  totalement réel. Rappelons le résultat principal :

**Théorème 0.** *Soit  $L/K$  une extension quadratique totalement imaginaire d'un corps de nombres totalement réel. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Le corps  $L$  est 2-birationalnel,*
- (ii) *Le corps  $K$  est 2-rationnel, son unique place 2-adique est décomposée dans  $L/K$  et l'extension  $L/K$  est ramifiée modérément soit en une place semi-primitive  $\mathfrak{p}$  soit en deux places primitives  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{q}$ .*

Dans ce contexte, une place finie  $\mathfrak{p}$  du corps de base  $K$  est dite *primitive* lorsqu'elle est totalement inerte dans la  $\mathbb{Z}_2$ -extension cyclotomique  $K^c/K$ ; *semi-primitive* lorsqu'elle est décomposée dans le premier étage de  $K^c/K$  et inerte au-delà. Une telle place est, en particulier, modérée (*i.e.* ici étrangère à 2).

L'objet du présent travail est d'étudier la propagation de la 2-birationalité par 2-extension (galoisienne) du corps de base. Le problème est le suivant : étant donnés une extension quadratique à conjugaison complexe  $L$  d'un corps totalement réel  $K$  d'une part, une 2-extension totalement réelle  $K'$  de  $K$  d'autre part, nous regardons à quelle condition sur les extensions  $L/K$  et  $K'/K$  la 2-birationalité de  $L/K$  se propage à l'extension induite  $LK'/K'$ .

Le résultat *a priori* surprenant que nous obtenons est le suivant :

**Théorème 1.** *Lorsque la 2-extension totalement réelle  $K'/K$  est ramifiée modérément en une place  $\mathfrak{p}$  (auquel cas celle-ci est primitive et c'est l'unique place modérée qui se ramifie dans  $K'/K$ ), la propagation de la 2-birationalité de  $L/K$  à  $LK'/K'$  a lieu si et seulement si les deux conditions qui suivent sont réalisées :*

- (i) *l'extension  $L/K$  est ramifiée modérément en exactement deux places : en la place  $\mathfrak{p}$  et en une autre place primitive  $\mathfrak{q}$  ;*

- (ii) le corps  $K'$  provient, par composition avec un étage fini  $K_n$  de la  $\mathbb{Z}_2$ -extension cyclotomique  $K^c/K$ , d'une extension quadratique  $K''$  de  $K$ .

En d'autres termes, si l'on impose à  $K'/K$  d'être linéairement disjointe de la  $\mathbb{Z}_2$ -extension cyclotomique  $K^c/K$ , la propagation de la birationalité est impossible lorsque  $L/K$  est modérément ramifiée en une place semi-primitive ; et lorsque  $L/K$  est modérément ramifiée en deux places primitives  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{q}$ , elle n'est possible que par extension quadratique  $\mathfrak{p}$ -modérément ou  $\mathfrak{q}$ -modérément ramifiée, ce qui conduit, comme nous le verrons, à deux possibilités (et deux seulement) pour  $K'$ . En itérant le processus, en revanche, il est alors facile de construire des tours infinies de telles extensions.

## 2 Corps 2-rationnels

Pour la commodité du lecteur nous rappelons brièvement ci-dessous quelques uns des résultats de [4] et [11] sur les notions de régularité et de rationalité :

**Définition 2.** Soit  $\ell$  un nombre premier. Un corps de nombres  $K$  est dit :

- (i)  $\ell$ -régulier, lorsque le  $\ell$ -sous-groupe de Sylow du noyau  $R_2(K)$  dans  $K_2(K)$  des symboles réguliers est trivial ;
- (ii)  $\ell$ -rationnel, si le groupe de Galois  $\mathcal{G}_K = \text{Gal}(M/K)$  de sa pro-extension maximale  $\ell$ -ramifiée  $\infty$ -décomposée est un pro- $\ell$ -groupe libre.

Lorsque  $K$  contient le sous-corps réel maximal  $\mathbb{Q}[\zeta + \zeta^{-1}]$  du  $\ell$ -ième corps cyclotomique  $\mathbb{Q}[\zeta]$ , il est équivalent d'affirmer qu'il est  $\ell$ -régulier ou qu'il est  $\ell$ -rationnel (cf. [7], Théorème 1.2). C'est évidemment le cas pour  $\ell = 2$ . Ainsi :

**Théorème 3.**  $K$  est 2-rationnel lorsqu'il vérifie les propriétés équivalentes :

- (i) La 2-partie du noyau dans  $K_2(K)$  des symboles réguliers est trivial.
- (ii) Le groupe de Galois  $\mathcal{G}_K = \text{Gal}(M/K)$  de sa pro-2-extension maximale de  $K$  2-ramifiée et  $\infty$ -décomposée est un pro-2-groupe libre (nécessairement sur  $1+c_K$  générateurs, si  $c_K$  est le nombre de places complexes de  $K$ ).
- (iii) Le groupe de Galois  $\mathcal{G}_K^{ab} = \text{Gal}(M^{ab}/K)$  de sa pro- $\ell$ -extension abélienne maximale 2-ramifiée  $\infty$ -décomposée est un  $\mathbb{Z}_2$ -module libre de rang  $1+c_K$ .
- (iv) Le corps  $K$  vérifie la conjecture de Leopoldt (pour le nombre premier 2) et le sous-module de torsion  $\mathcal{T}_K$  de  $\text{Gal}(M^{ab}/K)$  est trivial.
- (v)  $K$  possède une unique place dyadique  $\mathfrak{l}$  et son 2-groupe  $\mathcal{C}\ell'_K$  des 2-classes d'idéaux au sens restreint est trivial.

L'équivalence des diverses assertions (i) à (v) n'est autre que la déclinaison pour  $\ell = 2$  du Th. 1.2 de [7]. La formulation (ii) montre clairement que la 2-rationalité se propage par 2-extension 2-ramifiée  $\infty$ -décomposée, donc à chaque étage fini  $K_n$  de la  $\mathbb{Z}_2$ -extension cyclotomique. En particulier les 2-groupes de 2-classes  $\mathcal{C}\ell'_{K_n}$  sont tous triviaux et le 2-groupe  $\tilde{\mathcal{C}}\ell_K$  des 2-classes logarithmiques de  $K$  est ainsi trivial. Comme expliqué dans [6], il suit de là qu'un tel corps satisfait aussi la conjecture de Gross (pour le nombre premier 2).

La question de la propagation de la  $\ell$ -rationalité a été complètement résolue par [4] et [11]. Elle s'appuie sur la notion de place primitive. Pour  $\ell = 2$ , on a :

**Définition 4.** *Étant donné un corps de nombres  $K$ , un ensemble  $S$  de places modérées de  $K$  (i.e. ici de places finies étrangères à 2) est dit primitif (relativement au premier 2) lorsque la famille des logarithmes de Gras de ces places (i.e. de leurs images dans le groupe de Galois  $\mathcal{L} = \text{Gal}(Z/K)$  du compositum  $Z$  des  $\mathbb{Z}_2$ -extensions de  $K$ ) peut être complétée en une  $\mathbb{Z}_2$ -base de  $\mathcal{L}$ .*

Ainsi, lorsque  $K$  un corps totalement réel qui satisfait la conjecture de Leopoldt (pour le premier 2), par exemple un corps 2-rationnel, les ensembles primitifs de places modérées de  $K$  sont exactement les singletons  $S = \{\mathfrak{l}\}$ , où  $\mathfrak{l}$  est une place de  $K$  totalement inerte dans la  $\mathbb{Z}_2$ -extension cyclotomique  $Z/K$ .

**Définition 5.** *Une 2-extension  $L/K$  est dite primitivement ramifiée lorsque l'ensemble  $\mathcal{R}_{L/K}$  des places modérément ramifiées dans  $L/K$  est primitif.*

Le résultat de propagation (cf. [7], Théorème 3.5) s'énonce alors comme suit :

**Théorème 6.** *Étant donné une 2-extension de corps de nombres  $L/K$ , les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Le corps  $L$  est 2-rationnel.*
- (ii) *Le corps  $K$  est 2-rationnel et l'extension  $L/K$  est primitivement ramifiée.*

Donnons par exemple la liste des corps multiquadratiques 2-rationnels :

**Corollaire 7.** *Les corps multiquadratiques réels  $K$  qui sont 2-rationnels sont les sous-corps des corps biquadratiques  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{p}]$  pour les nombres premiers  $p$  primitifs, c'est-à-dire vérifiant  $p \equiv \pm 3 \pmod{8}$ . En d'autres termes ce sont :*

- (i) *le corps des rationnels  $\mathbb{Q}$  ;*
  - (ii) *les corps quadratiques  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ,  $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ ,  $\mathbb{Q}[\sqrt{2p}]$  ;*
  - (iii) *les corps biquadratiques  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{p}]$  ;*
- où  $p$  est un premier primitif :  $p \equiv \pm 3 \pmod{8}$ .

*Les corps multiquadratiques imaginaires 2-rationnels sont :*

- (iv) *les corps quadratiques  $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ ,  $\mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$ ,  $\mathbb{Q}[\sqrt{-p}]$ ,  $\mathbb{Q}[\sqrt{-2p}]$  ;*
  - (v) *les corps biquadratiques  $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}, \sqrt{2}]$ ,  $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}, \sqrt{p}]$ ,  $\mathbb{Q}[\sqrt{-2}, \sqrt{p}]$  ;*
  - (vi) *les corps triquadratiques  $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}, \sqrt{2}, \sqrt{p}]$  ;*
- où  $p$  est un premier primitif :  $p \equiv \pm 3 \pmod{8}$ .

*Preuve.* Le corps  $\mathbb{Q}$  étant 2-rationnel, il suffit d'écrire que la ramification modérée ne peut concerner qu'au plus un premier impair  $p$ , lequel doit en outre être primitif, i.e. inerte dans le premier étage  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]/\mathbb{Q}$  de la  $\mathbb{Z}_2$ -extension de  $\mathbb{Q}$  ; ce qui se traduit par la congruence annoncée :  $p \equiv \pm 3 \pmod{8}$ .

### 3 Corps 2-birationnels

Venons-en maintenant à la notion de corps 2-birationnel (cf. [8] et [9]) :

**Définition 8.** *Un corps de nombres  $K$  est dit  $\mathfrak{l}$ -rationnel en une place  $\mathfrak{l}$  au-dessus de  $\ell$  si sa  $\ell$ -extension  $\ell$ -ramifiée,  $\mathfrak{l}$ -décomposée maximale est triviale.*

Naturellement la trivialité du groupe de Galois de la pro- $\ell$ -extension  $\ell$ -ramifiée,  $\mathfrak{l}$ -décomposée maximale se lit sur son abélianisé. On peut alors interpréter la notion de la pro- $\mathfrak{l}$ -rationalité en termes de corps de classes. Introduisons pour cela quelques notations de la Théorie  $\ell$ -adique du corps de classes (cf. [6]).

Notons :

- $\mathcal{R}_{K_p}$  le compactifié  $\ell$ -adique du groupe multiplicatif du complété  $K_p$  ;
- $\mu_p$  le sous-groupe de torsion de  $\mathcal{R}_{K_p}$  ;
- $\mathcal{J}_K = \prod_p^{res} \mathcal{R}_{K_p}$  le  $\ell$ -adifié du groupe des idèles de  $K$  ;
- $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes K^\times$  son sous-groupe principal ;
- $\mathcal{C}_K = \mathcal{J}_K / \mathcal{R}_K$  enfin le  $\ell$ -groupe des classes d'idèles.

Le groupe  $\mathcal{C}_K$  s'identifie au groupe de Galois de la pro- $\ell$ -extension abélienne maximale de  $K$ . Et d'après [8] Th. 1.7, il vient :

**Proposition 9.** *Le corps  $K$  est  $\ell$ -rationnel si et seulement si on a l'identité :*

$$\mathcal{J}_K = \mathcal{R}_K \mathcal{R}_{K_\ell} \prod_{p \neq \ell} \mu_p ;$$

ce qui a lieu si et seulement si les deux conditions suivantes se trouvent réunies :

- (i) le groupe des  $\ell$ -classes d'idéaux  $\mathcal{C}\ell_K$  du corps  $K$  est trivial ;
- ii) l'application de semi-localisation  $s'_\ell$  induit une surjection du tensorisé  $\mathcal{E}'_K$  du groupe des  $\ell$ -unités de  $K$  sur le produit  $\mathcal{R}'_\ell = \prod_{p|\ell\infty; p \neq \ell} \mathcal{R}_{K_p}$ .

*Remarque.* Sous les conditions précédentes,  $K$  est logarithmiquement principal en ce sens que son  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques  $\tilde{\mathcal{C}}\ell_K$  est trivial. En particulier  $K$  vérifie banalement la conjecture de Gross généralisée (pour le premier  $\ell$ ).

Ces définitions générales étant posées, nous pouvons spécifier au cas  $\ell = 2$ .

**Théorème 10.** *Un corps totalement imaginaire  $L$  est dit 2-birationnel lorsqu'il est  $\ell$ -rationnel en chacune des places 2-adiques (en ce sens qu'il n'admet pas de 2-extension, 2-ramifiée,  $\ell$ -décomposée non triviale), ce qui a lieu si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

- (a)  $L$  admet exactement 2 places 2-adiques  $\ell$  et  $\ell'$  ;
- (b) le 2-groupe  $\mathcal{C}\ell_L$  des 2-classes d'idéaux de  $L$  est trivial, i.e. 2-groupe des classes d'idéaux de  $L$  est engendré par les images de  $\ell$  et de  $\ell'$ .
- (c) les plongements canoniques de  $L^\times$  dans  $L_\ell^\times$  et  $L_{\ell'}^\times$  induisent des isomorphismes  $\mathcal{E}'_L \simeq \mathcal{R}_{L_\ell} \simeq \mathcal{R}_{L_{\ell'}}$  du tensorisé 2-adique  $\mathcal{E}'_L$  du groupe des 2-unités de  $L$  sur les compactifiés locaux associés aux places 2-adiques.

Nous avons maintenant besoin d'introduire la notion de place semi-primitive.

**Définition 11.** *Soit  $K$  un corps de nombres totalement réel qui satisfait la conjecture de Leopoldt en  $\ell = 2$  et  $K^c$  sa  $\mathbb{Z}_2$ -extension cyclotomique. Nous disons qu'une place finie modérée (i.e. ici ne divisant pas 2) est :*

- primitive, lorsque son image dans le groupe procyclique  $\text{Gal}(K^c/K)$  n'est pas un carré, autrement dit lorsqu'elle n'est pas décomposée dans  $K^c/K$  ;
- semi-primitive, lorsqu'elle se décompose dans le premier étage de la  $\mathbb{Z}_2$ -extension cyclotomique  $K^c/K$  mais pas au-delà.

Cela posé, nous avons les résultats suivants (cf [9] Th. 4 & Prop. 5) :

**Théorème 12.** *Soit  $L/K$  une extension quadratique totalement imaginaire d'un corps de nombres totalement réel. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) Le corps  $L$  est 2-birationnel.
- (ii) Le corps  $K$  est 2-rationnel, son unique place 2-adique est décomposée dans  $L/K$  et l'extension  $L/K$  est ramifiée modérément soit en une place semi-primitive  $\mathfrak{p}$  soit en deux places primitives  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{q}$ .
- (iii)  $K$  est 2-rationnel ;  $L$  est 2-logarithmiquement principal ; et  $L/K$  est 2-décomposée et ramifiée modérément en au moins une place.

## 4 Corps multiquadratiques 2-birationnels

Nous nous proposons dans cette section de mettre en œuvre les équivalences données par le Th. 12 et la classification des corps multiquadratiques réels 2-rationnels explicitée dans le Cor. 7 pour dresser la liste des corps multiquadratiques 2-birationnels : un tel corps  $L$  s'obtient, en effet, par composition d'un corps quadratique imaginaire  $k = \mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$  et d'un corps multiquadratique réel  $K$ , qui est nécessairement 2-rationnel en vertu de la condition (ii) du Théorème.

Le résultat que nous obtenons est le suivant :

**Théorème 13.** *Soient  $L$  un corps multiquadratique imaginaire et  $K$  son sous-corps réel maximal. Le corps  $L$  est alors le compositum du corps multiquadratique réel  $K$  et d'un corps quadratique imaginaire  $k = \mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ , pour un  $d \geq 1$  sans facteur carré. Et  $L$  est 2-birationnel si et seulement si  $K$  est 2-rationnel (i.e. un sous-corps de  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{p}]$  avec  $p \equiv \pm 3 \pmod{8}$ ) et que l'on est dans l'une des quatre configurations suivantes :*

- (a) Pour  $K[\sqrt{2}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  :
  - (i)  $d = q$  premier avec  $q \equiv 7 \pmod{16}$  ;
  - (ii)  $d = qq'$  avec  $q, q'$  premiers et  $q \equiv -q' \equiv \pm 3 \pmod{8}$ .
- (b) Pour  $K[\sqrt{2}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{p}]$  :
  - (i)  $d = q \neq p$  premier avec  $-q \equiv p \equiv \pm 3 \pmod{8}$  et  $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$  ;
  - (ii)  $d = q \neq p$  premier avec  $-q \equiv p \equiv \pm 3 \pmod{8}$  et  $\left(\frac{p}{q}\right) = +1$ .

Pour démontrer cela, nous nous appuyerons sur le lemme :

**Lemme 14.** *Soit  $L$  une extension quadratique totalement imaginaire d'un corps totalement réel  $K$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $K_n$  le  $n$ -ième étage de la  $\mathbb{Z}_2$ -extension cyclotomique  $K^c$  de  $K$  et  $L_n = K_n L$  le compositum. On a alors les équivalences :*

- (i)  $K$  est 2-rationnel  $\iff K_n$  est 2-rationnel.
- (ii)  $L$  est 2-birationnel  $\iff L_n$  est 2-birationnel.

*Preuve.* Commençons par établir le Lemme 14.

Observons d'abord que la  $\mathbb{Z}_2$ -extension cyclotomique  $K^c/K$  étant 2-ramifiée, il en est de même de toutes ses sous-extensions finies  $K_n/K$ , de sorte que la 2-rationalité de  $K$  est bien équivalente à celle de chacun des  $K_n$  en vertu du Théorème 6 ; d'où l'équivalence (i) du Lemme.

Ce point acquis, intéressons-nous à la 2-birationalité de  $L$ . D'après la formulation (iii) donnée par le Théorème 12, celle-ci se caractérise par la 2-rationalité de  $K$ , la 2-décomposition de  $L/K$  et le triviale du 2-groupe des classes logarithmiques  $\tilde{\mathcal{C}}\ell_L$  ; et il s'agit simplement de vérifier que ces conditions se propagent le long de la tour cyclotomique  $L^c/L$ . Or :

- (i) La 2-rationalité de  $K_n$  se lit indifféremment à n'importe quel étage de la tour en vertu du point (i) ci-dessus.
- (ii) Si  $K$  est 2-rationnel, il admet une unique place dyadique  $\mathfrak{l}$  et il en est de même pour chacun des  $K_n$  ; l'unique place dyadique  $\mathfrak{l}_n$  de  $K_n$  se décompose dans  $L_n/K_n$  si et seulement si  $\mathfrak{l}$  est décomposée dans  $L/K$ .

- (iii) Enfin, le 2-groupe des classes logarithmiques  $\tilde{\mathcal{C}}\ell_L$  étant le quotient des copoints fixes par  $\Gamma = \text{Gal}(L^c/L)$  de l'abélianisé  $\mathcal{C}'_L$  du groupe de Galois de la pro-2-extension totalement décomposée maximale  $\tilde{L}$  de  $L$  (cf. [5, 6]), la trivialité de  $\tilde{\mathcal{C}}\ell_L$  affirme tout simplement l'égalité  $\tilde{L} = L$ ; ce qui se lit encore à n'importe quel étage de la tour, puisque  $\tilde{L}$  est aussi la pro-2-extension totalement décomposée maximale de chacun des  $L_n$ .

*Preuve du Théorème.* Si  $L$  est 2-birationnel, son sous-corps réel  $K$  est 2-rationnel i.e. (par le Corollaire 7) contenu dans un corps biquadratique  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{p}]$  pour un premier primitif  $p \equiv \pm 3 \pmod{8}$ . Cela étant, le Lemme 14 nous permet de remplacer  $K$  par n'importe quel étage fini de sa  $\mathbb{Z}_2$ -extension cyclotomique, donc de supposer par exemple  $K \supset \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ . Distinguons deux cas :

- Pour  $K[\sqrt{2}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  :

Dans ce cas, toujours d'après le Lemme 14, nous pouvons remplacer  $K$  par  $K[\sqrt{2}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  donc par  $\mathbb{Q}$ ; de sorte que le corps  $L$  est 2-birationnel si et seulement si  $k = \mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$  l'est; ce qui suppose, d'après le Théorème 12 (ii) :

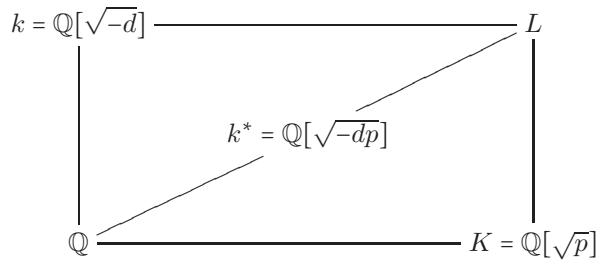
- 2 décomposé dans l'extension  $k/\mathbb{Q}$ , i.e.  $d \equiv -1 \pmod{8}$ , et;
- $k/\mathbb{Q}$  ramifiée modérément soit en une place semi-primitive  $q$ , i.e.  $d = q$  ou  $2q$ , avec  $q \equiv \pm 7 \pmod{16}$ ; soit en deux places primitives  $q$  et  $q'$ , i.e.  $d = qq'$  ou  $2qq'$ , avec  $q \equiv \pm q' \equiv \pm 3 \pmod{8}$ .

En fin de compte, il vient  $d = q \equiv 7 \pmod{16}$  ou  $d = qq'$  avec  $q \equiv -q' \equiv \pm 3 \pmod{8}$ .

- Pour  $K[\sqrt{2}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{p}]$  :

Dans ce cas, toujours d'après le Lemme 14, nous pouvons remplacer  $K$  par  $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$  et  $L$  par  $\mathbb{Q}[\sqrt{p}, \sqrt{-d}]$ ; d'où par le Théorème 12 (ii), les trois conditions :

- Le corps quadratique  $K = \mathbb{Q}[\sqrt{p}]$  est 2-rationnel, i.e. on a :  $p \equiv \pm 3 \pmod{8}$ .
- Son unique place dyadique  $\mathfrak{l}$  est décomposée dans  $L/K$ ; autrement dit soit 2 est décomposé dans l'extension  $k/\mathbb{Q}$ , auquel cas on a :  $d \equiv -1 \pmod{8}$ ; soit 2 est décomposé dans l'extension  $\mathbb{Q}[\sqrt{-dp}]/\mathbb{Q}$ , auquel cas on a :  $dp \equiv -1 \pmod{8}$ , conformément au schéma d'extensions :



Et, dans les deux éventualités,  $d$  est donc impair.

- $L/K$  se ramifie modérément soit en une unique place semi-primitive  $\mathfrak{q}$ , soit en deux places primitives  $\mathfrak{q}$  et  $\mathfrak{q}'$ .
  - Dans le premier cas la place  $\mathfrak{q}$  provient alors d'un premier  $q \neq p$  ramifié dans  $k/\mathbb{Q}$  mais inerte dans  $K/\mathbb{Q}$ , auquel cas on a :  $d = q$  ou  $d = pq$  et  $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$ . Reste simplement à vérifier la semi-primitivité de  $\mathfrak{q}$ . Le schéma



$$\begin{array}{ccccccc}
K & \xrightarrow{\text{dec}} & K[\sqrt{2}] & \xrightarrow{\text{in}} & K[\sqrt{2+\sqrt{2}}] & \cdots & K^c \\
\downarrow \text{in} & & \downarrow \text{dec} & & \downarrow \text{dec} & & \downarrow \text{dec} \\
\mathbb{Q} & \xrightarrow{\text{in}} & \mathbb{Q}[\sqrt{2}] & \xrightarrow{\text{in}} & \mathbb{Q}[\sqrt{2+\sqrt{2}}] & \cdots & \mathbb{Q}^c
\end{array}$$

(où est indiqué le comportement des places au-dessus de  $q$ ) montre alors que celle-ci correspond à la primitivité de  $q$ , qui s'écrit :  $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$ .

- Dans le second cas,  $\mathfrak{q}$  et  $\mathfrak{q}'$ , du fait de leur primitivité, proviennent nécessairement d'un même premier  $q \neq p$  ramifié dans  $k/\mathbb{Q}$  et décomposé dans  $K/\mathbb{Q}$ , auquel cas on a :  $d = q$  ou  $d = pq$  et  $(\frac{p}{q}) = +1$ , ainsi que la congruence  $q \equiv \pm 3$  qui traduit la primitivité de  $q$ .

En fin de compte, quitte à échanger  $k$  et  $k^*$ , on obtient  $d = q \neq p$  premier avec  $-q \equiv p \equiv \pm 3 \pmod{8}$  et  $(\frac{p}{q}) = -1$  dans le premier cas ;  $(\frac{p}{q}) = +1$  dans le second ; ce qui achève la démonstration.

*Remarque.* Le cas (a) du Théorème 13 redonne naturellement la classification des corps quadratiques imaginaires 2-birationnels donnée dans [8] (Cor. 1.12), ainsi que la liste des corps quadratiques imaginaires 2-logarithmiquement principaux établie dans [12] (restreinte ici à ceux qui sont 2-décomposés) :

**Corollaire 15.** *Les corps quadratiques 2-birationnels sont les corps quadratiques imaginaires  $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-p}]$  pour  $p$  premier de la forme  $p \equiv 7 \pmod{16}$ , et  $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-pq}]$  pour  $p$  et  $q$  premiers  $p \equiv -q \equiv 3 \pmod{8}$ .*

## 5 Propagation de la birationalité

Dans le cas (b) du Théorème 13, on a  $d = q$  ou  $d = -pq$ , de sorte que le corps  $L = K[\sqrt{-d}]$  provient, par composition avec  $K$ , indifféremment du corps quadratique imaginaire  $k = \mathbb{Q}[\sqrt{-q}]$  comme du corps  $k^* = \mathbb{Q}[\sqrt{-pq}]$ . Il est intéressant d'observer que, du fait des congruences satisfaites par  $p$  et  $q$ , un et un seul d'entre eux (à savoir  $k^*$ ) se trouve être birationnel. Plus précisément,  $k^*$  est une extension 2-birationnelle de  $\mathbb{Q}$  qui est ramifiée modérément en deux places primitives, dont l'une se ramifie dans  $K/\mathbb{Q}$  tandis que l'autre se décompose.

Nous allons voir que cette situation est, en fait, générale :

**Théorème 16.** *Soit  $K$  un corps 2-rationnel totalement réel ;  $L = K[\sqrt{-\delta}]$  (avec  $\delta \gg 0$  dans  $K$ ) une extension quadratique totalement imaginaire et  $K'$  une 2-extension totalement réelle non triviale de  $K$  linéairement disjointe de la  $\mathbb{Z}_2$ -extension cyclotomique  $K^c$  ; soit enfin  $L' = LK'$  le compositum de  $L$  et de  $K'$ . Alors :*

- (i) *Si  $L'/K'$  est 2-birationnelle, l'extension  $L/K$  ne peut elle-même être 2-birationnelle que si sont réunies les deux conditions suivantes :*
  - (a) *L'extension  $K'/K$  est aussi quadratique :  $[K' : K] = 2$ .*
  - (b) *L'extension  $L/K$  vérifie l'une des deux propriétés qui suivent :*
    - (b1) *ou bien  $L/K$  est ramifiée modérément en une unique place primitive  $\mathfrak{q}$ , laquelle est inerte dans  $K'/K$  ;*
    - (b2) *ou bien  $L/K$  est ramifiée modérément en exactement deux places primitives  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{q}$  et l'extension quadratique  $K'/K$  est ramifiée modérément en exactement l'une de ces deux places et décomposée en l'autre.*



(ii) Réciproquement, lorsque les conditions ci-dessus sont réunies, la 2-birationalité de  $L/K$  se propage à  $L'/K'$ .

En particulier :

**Scolie 17.** La propagation de la 2-birationalité par 2-extension du corps de base ne peut se faire que par extension quadratique.

**Scolie 18.** Cette propagation ne peut se faire que si l'extension de départ  $L/K$  est ramifiée modérément en deux places primitives.

*Preuve du Théorème.* Supposons d'abord  $L'/K'$  2-birationnelle. Le corps  $K'$  est alors une extension 2-rationnelle de  $K$ . Et, comme nous l'avons supposée linéairement disjointe de la 2-extension cyclotomique  $K^c/K$ , le Théorème 6 nous assure que l'extension  $K'/K$  est modérément ramifiée en une unique place modérée  $\mathfrak{p}$ , laquelle est primitive dans  $K$ . Plus précisément, il résulte de l'hypothèse de disjonction linéaire que la place  $\mathfrak{p}$  est totalement ramifiée dans  $K'/K$  (puisque la pro-2-extension 2-ramifiée  $\infty$ -décomposée maximale de  $K$  est  $K^c$ ). En particulier, l'unique place  $\mathfrak{p}'$  de  $K'$  au-dessus de  $\mathfrak{p}$  est primitive dans  $K'$ .

Considérons le schéma d'extensions :

$$\begin{array}{ccc} L = K[\sqrt{-\delta}] & \text{---} & L' = LK' \\ | & & | \\ K & \text{---} & K' \end{array}$$

Et examinons les deux possibilités décrites dans le Théorème 12 (ii) :

- $L'/K'$  est ramifiée modérément en une unique place semi-primitive  $\mathfrak{q}'$ .

Dans ce cas,  $\mathfrak{q}'$ , qui n'est pas primitive, est distincte de  $\mathfrak{p}'$  et provient d'une place  $\mathfrak{q}$  de  $K$  qui se ramifie dans  $L/K$  mais ne se décompose pas dans  $K'/K$ . Ainsi  $\mathfrak{q}$  est (totalement) inerte dans  $K'/K$ , ce qui montre déjà que  $K'/K$  est nécessairement cyclique. Plus précisément, puisque  $\mathfrak{q}'$  est semi-primitive dans  $K'$ , son degré d'inertie est (au plus) 2 et  $\mathfrak{q}$  doit être primitive. Ainsi d'une part  $K'/K$  est quadratique ; et d'autre part  $L/K$ , qui est ramifiée en la place primitive  $\mathfrak{q}$ , dès lors qu'elle est 2-birationnelle se ramifie aussi en une autre place primitive (toujours en vertu du Théorème 12 (ii)), laquelle ne peut être que  $\mathfrak{p}$ .

- $L'/K'$  est ramifiée modérément en deux places primitives  $\mathfrak{q}'_1$  et  $\mathfrak{q}'_2$ .

Dans ce cas,  $\mathfrak{q}'_1$  et  $\mathfrak{q}'_2$  proviennent soit d'une même place primitive  $\mathfrak{q}$  de  $K$ , soit de deux places primitives  $\mathfrak{q}_1$  et  $\mathfrak{q}_2$  distinctes, qui se ramifient dans  $L/K$ .

Dans cette dernière hypothèse, ni  $\mathfrak{q}_1$  ni  $\mathfrak{q}_2$  ne pourraient se décomposer dans  $K'/K$ , car  $L'/K'$  serait alors ramifiée modérément en quatre places ; elles ne pourraient non plus présenter de l'inertie, car  $\mathfrak{q}'_1$  ou  $\mathfrak{q}'_2$  ne serait plus primitive dans  $K'$  ; elles seraient donc toutes deux totalement ramifiées dans  $K'/K$ , contrairement au fait que  $\mathfrak{p}$  est la seule place modérée ramifiée dans  $K'/K$ .

Il en résulte que  $\mathfrak{q}'_1$  et  $\mathfrak{q}'_2$  proviennent nécessairement d'une même place primitive  $\mathfrak{q}$  de  $K$  dont l'indice de décomposition dans  $K'/K$  est égal à 2 et le degré d'inertie 1, puisque  $\mathfrak{q}'_1$  et  $\mathfrak{q}'_2$  sont primitives dans  $K'$ . De plus,  $\mathfrak{q}$  est distincte de  $\mathfrak{p}$ , sans quoi  $\mathfrak{q}'_1$  et  $\mathfrak{q}'_2$  ne seraient pas ramifiées dans  $L'/K'$ , donc non ramifiée dans  $K'/K$ .

En résumé  $[K' : K]$  est égal à 2 et  $\mathfrak{q}'_1$  et  $\mathfrak{q}'_2$  proviennent d'une même place primitive de  $K$  ramifiée dans  $L/K$  et décomposée dans  $K'/K$ . Comme dans le cas précédent,  $L/K$ , qui est ramifiée en la place primitive  $\mathfrak{q}$ , dès lors qu'elle est 2-birationnelle se ramifie nécessairement en une autre place primitive (toujours en vertu du Théorème 12 (ii)), laquelle ne peut être que  $\mathfrak{p}$ .

Intéressons nous maintenant à la montée en supposant  $L/K$  2-birationnelle ramifiée modérément en deux places primitives  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{q}$ , dont l'une, disons  $\mathfrak{p}$ , est l'unique place modérée ramifiée dans l'extension quadratique  $K'/K$ . Et examinons successivement les deux possibilités recensées plus haut :

- La place  $\mathfrak{q}$  est inerte dans  $K'/K$ .

Dans ce cas, la place  $\mathfrak{q}'$  de  $K'$  au-dessus de  $\mathfrak{q}$  est semi-primitive dans  $K'$  et c'est l'unique place modérée ramifiée dans  $L'/K'$ , puisque  $\mathfrak{p}$ , qui est totalement ramifiée dans  $K'/K$ , ne peut l'être aussi dans  $L'/K$ , son sous-groupe d'inertie étant cyclique. Ainsi  $K'$  est bien 2-rationnel en vertu du Théorème 6 et  $L'$  est 2-birationnel d'après le Théorème 12 (ii).

- La place  $\mathfrak{q}$  est décomposée dans  $K'/K$ .

Dans ce cas, les deux place  $\mathfrak{q}'_1$  et  $\mathfrak{q}'_2$  de  $L'$  au-dessus de  $\mathfrak{q}$  sont encore primitives et ce sont les seules places modérées qui se ramifient dans  $L'/K'$ , puisque, comme précédemment  $\mathfrak{p}$ , qui est totalement ramifiée dans  $K'/K$ , ne peut l'être aussi dans  $L'/K$ . On conclut comme plus haut que  $L'/K'$  est 2-birationnelle.

## 6 Tours d'extensions 2-birationnelles

Le Théorème 16 limite aux seules extensions quadratiques la possibilité de réaliser la propagation de la 2-rationalité par 2-extension (galoisienne) du corps de base  $K$ . Mais il laisse ouverte la possibilité de construire des tours infinies (donc non galoisiennes) de telles extensions. Comme chaque montée quadratique n'est possible qu'à partir d'une extension birationnelle  $L/K$  biramifiée modérément, la seule contrainte pour que la construction puisse se poursuivre est de ne fabriquer à chaque étage  $n$  que des extension birationnelles  $L_n/K_n$  qui soient encore biramifiées.

En d'autres termes, la question de la propagation indéfinie de la 2-birationnalité se ramène à construire, pour une extension 2-birationnelle  $L/K$  donnée, ramifiée modérément en exactement deux places primitives  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{q}$ , une extension quadratique totalement réelle  $K'$  de  $K$  décomposée en  $\mathfrak{q}$  et ramifiée modérément en  $\mathfrak{p}$  seulement (la ramification sauvage étant indifférente).

En vertu de la théorie 2-adique du corps de classes, une telle extension existe si et seulement si le 2-groupe des  $\infty\mathfrak{q}$ -classes  $2\mathfrak{p}$ -infinitésimales est non trivial.

Regardons si c'est bien le cas. Rappelons le contexte de notre étude :

1.  $K$  est un corps de nombres totalement réel qui est 2-rationnel ; ce qui peut se traduire par les deux propriétés suivantes :
  - (a)  $K$  possède une seule place dyadique  $\mathfrak{l}$  ; d'où :  $[K_{\mathfrak{l}} : \mathbb{Q}_2] = [K : \mathbb{Q}] = r$  ;
  - (b) sa 2-extension abélienne 2-ramifiée  $\infty$ -décomposée maximale est sa  $\mathbb{Z}_2$ -extension cyclotomique  $K^c$  ; ainsi le groupe d'idèles qui définit l'extension cyclotomique est donnée par la formule suivante :

$$\tilde{\mathcal{J}}_K = \prod_{\tau \neq \mathfrak{l}} \mu_\tau \mathcal{R}_K$$

2.  $L$  est une extension quadratique totalement imaginaire de  $K$  qui se ramifie modérément en exactement deux places  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{q}$ , qui sont primitives. En termes idéliques, cette primitivité s'écrit :

$$\mathcal{J}_K = \tilde{\mathcal{J}}_K \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} = \tilde{\mathcal{J}}_K \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{q}}}$$

Cela étant, nous cherchons une extension quadratique  $K'/K$  satisfaisant les quatre propriétés suivantes :

- (i) elle est ramifiée modérément en  $\mathfrak{p}$  seulement,
- (ii) elle est décomposée en  $\mathfrak{q}$ ,
- (iii) elle est non décomposée en 2,
- (iv) elle est complètement décomposée à l'infini (*i.e.* totalement réelle).

Pour l'instant, considérons la 2-extension abélienne maximale  $N$  de  $K$  qui est totalement réelle,  $\mathfrak{p}$ -modérément ramifiée et  $\mathfrak{q}$ -décomposée. Le sous-groupe d'idèles qui lui correspond est ainsi :

$$\prod_{\tau | \infty} \mu_\tau \left( \prod_{\tau \nmid \mathfrak{p} \infty} \mu_\tau \right) \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{q}}} \mathcal{R}_K.$$

Et il vient donc :

$$\text{Gal}(N/K) = \mathcal{J}_K / \prod_{\tau \nmid \mathfrak{p} \mathfrak{l}} \mu_\tau \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{q}}} \mathcal{R}_K \simeq \mu_{\mathfrak{p}} / \mu_{\mathfrak{p}} \cap \left( \prod_{\tau \nmid \mathfrak{p} \mathfrak{l}} \mu_\tau \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{q}}} \mathcal{R}_K \right),$$

en vertu des égalités rappelées plus haut :

$$\mathcal{J}_K = \tilde{\mathcal{J}}_K \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{q}}} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{J}}_K = \prod_{\tau \neq \mathfrak{l}} \mu_\tau \mathcal{R}_K.$$

Dans le quotient obtenu, les idèles principaux (*i.e.* les éléments de  $\mathcal{R}_K$ ) qui apparaissent au dénominateur sont dans  $\prod_{\tau \neq \mathfrak{l}} \mu_\tau$  : ce sont des  $\mathfrak{q}$ -unités infinitésimales.

Or, nous avons ici :

**Lemme 19.** *Dans un corps de nombres 2-rationnel totalement réel, pour toute place modérée  $\mathfrak{q}$  de  $K$  le pro-2-groupe  $\mathcal{E}_{\infty}^{\mathfrak{q}}$  des  $\mathfrak{q}$ -unités infinitésimales est trivial.*

*Preuve.* Il s'agit de vérifier que l'image locale  $s_{\mathfrak{l}}(\mathcal{E}^{\mathfrak{q}})$  du 2-adifié  $\mathcal{E}^{\mathfrak{q}} = \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} E^{\mathfrak{q}}$  du groupe des  $\mathfrak{q}$ -unités de  $K$  est encore un  $\mathbb{Z}_2$ -module de rang  $r = [K : \mathbb{Q}]$ . Pour voir cela, observons que  $K$ , puisqu'il est présumé 2-rationnel, vérifie la conjecture de Leopoldt ; autrement dit que le 2-adifié groupe des unités  $\mathcal{E} = \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} E$  s'injecte dans le groupe des unités locales  $\mathcal{U}_{\mathfrak{l}}$  attaché à l'unique place dyadique  $\mathfrak{l}$  de  $K$ . En particulier  $\mathcal{E}$ , qui est de rang  $r - 1 = [K : \mathbb{Q}] - 1$ , s'envoie avec un indice fini dans la préimage  $\mathcal{U}_{\mathfrak{l}}^*$  dans  $\mathcal{U}_{\mathfrak{l}}$  du groupe  $\mu_2 = \{\pm 1\}$  des racines de l'unité pour la norme arithmétique  $\nu = N_{K/\mathbb{Q}}$ . Soit alors  $x$  l'image canonique dans  $\mathcal{E}^{\mathfrak{q}}$  d'un générateur arbitraire d'une puissance principale de l'idéal  $\mathfrak{q}$ . La norme  $x^{\nu}$  est (au signe près) une puissance non triviale de  $N_{\mathfrak{q}}$ , et son logarithme 2-adique n'est donc pas nul. De sorte que le  $\mathbb{Z}_2$ -module  $s_{\mathfrak{l}}(\mathcal{E}^{\mathfrak{q}})$ , qui contient  $s_{\mathfrak{l}}(\mathcal{E})$  et  $s_{\mathfrak{l}}(x)$ , est de rang au moins  $(r - 1) + 1 = r$  ; et finalement de rang exactement  $r$ , tout comme  $\mathcal{U}_{\mathfrak{l}}$ . En d'autres termes, le sous-module  $\mathcal{E}_{\infty}^{\mathfrak{q}}$  des  $\mathfrak{q}$ -unités infinitésimales est bien trivial.

Ce point acquis, nous avons obtenu :

**Proposition 20.** *Pour toute place primitive  $\mathfrak{q}$  d'un corps 2-rationnel totalement réel  $K$ , la 2-extension abélienne maximale  $N$  de  $K$  qui est totalement réelle,  $\mathfrak{q}$ -décomposée et ramifiée modérément en une unique place  $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ , est cyclique, de groupe de Galois :*

$$\text{Gal}(N/K) \simeq \mu_{\mathfrak{p}}.$$

*En particulier,  $N/K$  contient une unique sous-extension quadratique  $K'/K$ .*

Il suit de là que, sous les hypothèses de la proposition, l'unique sous-extension quadratique  $K'/K$  de  $N/K$  est l'unique extension quadratique qui satisfait aux conditions (i), (ii) et (iv) listées plus haut. Reste à voir si elle vérifie également la condition (iii) qui postule l'existence d'une unique place dyadique dans  $K'$ . Or c'est là qu'intervient précisément la condition de primitivité de la place  $\mathfrak{p}$ , que nous n'avons pas utilisée jusqu'ici : les résultats sur la propagation de la 2-rationalité rappelés dans le chapitre 1 assurent que  $K'$  est encore 2-rationnel si et seulement si la place  $\mathfrak{p}$  est primitive dans  $K$ . Lorsque c'est le cas,  $K'$  ne peut alors contenir qu'une seule place dyadique ; et la condition (iii) est, de ce fait, automatiquement vérifiée.

L'ensemble de cette discussion peut donc se résumer comme suit :

**Théorème 21.** *Soient  $K$  un corps 2-rationnel totalement réel et  $L$  une extension quadratique 2-birationnelle totalement imaginaire de  $K$  ramifiée modérément en deux places primitives  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{q}$ . Il existe alors exactement deux extensions quadratiques  $K'/K$  totalement réelles, 2-rationnelles et ramifiées modérément, telles que l'extension composée  $L' = LK'$  soit 2-birationnelle : celle qui est ramifiée modérément en  $\mathfrak{p}$  et décomposée en  $\mathfrak{q}$  ; et celle qui est ramifiée modérément en  $\mathfrak{q}$  et décomposée en  $\mathfrak{p}$ .*

Comme vu plus avant, l'extension  $L'/K'$  vérifie à son tour les mêmes hypothèses que l'extension de départ. Itérant le théorème, on obtient ainsi :

**Scolie 22.** *Sous les hypothèses du théorème, il existe une infinité de tours infinies d'extensions relativement quadratiques  $K \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_i \subset \dots$  de corps 2-rationnels totalement réels telles que les extensions composées  $L_i = LK_i$  pour  $i \in \mathbb{N}$  soient 2-birationnelles.*

Il convient, en effet, à chaque étage  $i \in \mathbb{N}$  déjà construit, de choisir celle des deux places primitives du corps  $K_i$  ramifiées dans  $L_i/K_i$  qu'on autorise à se ramifier modérément dans l'extension quadratique  $K_{i+1}/K_i$ .

## 7 Appendice : identités du miroir

Il peut être instructif de relire les résultats ci-dessus à la lumière des identités du miroir qui fournissent une seconde preuve du Théorème 21

Reprenons pour cela les calculs effectués plus haut : l'isomorphisme donné par le corps de classes

$$\text{Gal}(N/K) \simeq \mu_{\mathfrak{p}}/\mu_{\mathfrak{p}} \cap \left( \prod_{\tau \nmid \mathfrak{p}} \mu_{\tau} \mathcal{R}_{\mathfrak{q}} \mathcal{R}_K \right),$$

nous assure que l'extension  $N/K$  est cyclique (éventuellement triviale). Posons  $S = \{\mathfrak{q}\infty\}$  et  $T = \{\mathfrak{lp}\}$ . Par construction, le groupe de Galois  $\text{Gal}(N/K)$  s'identifie alors au 2-groupe des  $S$ -classes  $T$ -infinitésimales  $\mathcal{C}\ell_T^S$ ; et le résultat précédent se lit tout simplement :

$$rg_2 \mathcal{C}\ell_T^S \leq 1.$$

Nous allons à présent minorer ce rang grâce à la formule de réflexion de Gras (cf. Th. 4.6, p. 45 de [3]).

Reprenant les notations de Gras, nous avons :  $S = \{\mathfrak{q}\infty\}$ ,  $T = \{\mathfrak{lp}\}$ ,  $S_0 = \{\mathfrak{q}\}$ ,  $T_2 = \{\mathfrak{l}\}$ ,  $S_2 = \emptyset$  et  $\Delta_\infty = \emptyset$ ; donc :

$$rg_2 \mathcal{C}\ell_T^S - rg_2 \mathcal{C}\ell_{\{\mathfrak{q}\}}^{\{\mathfrak{lp}\}} = |T| + [K_{\mathfrak{l}} : \mathbb{Q}_2] - r - |S_0| - |\Delta_\infty| = 2 + r - r - 1 - 0 = 1$$

De cette formule, il suit en particulier :

$$rg_2 \mathcal{C}\ell_T^S \geq 1;$$

de sorte qu'en fin de compte nous avons simultanément :

$$rg_2 \mathcal{C}\ell_T^S = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{C}\ell_{\{\mathfrak{q}\}}^{\{\mathfrak{lp}\}} = 1.$$

Le groupe  $\mathcal{C}\ell_T^S$  est donc cyclique mais non trivial (comme nous l'avons déjà établi à l'aide du lemme d'indépendance 19 plus haut), tandis que le  $\ell$ -groupe  $\mathcal{C}\ell_{\{\mathfrak{q}\}}^{\{\mathfrak{lp}\}}$  des  $\{\mathfrak{lp}\}$ -classes  $\{\mathfrak{q}\}$ -infinitésimales, lui, est nécessairement trivial.

De l'identité  $rg_2 \mathcal{C}\ell_T^S = 1$ , on conclut qu'il existe une unique extension quadratique  $K'/K$  qui est non-ramifiée modérément en dehors de  $\mathfrak{p}$  et  $\infty\mathfrak{q}$ -décomposée. Il reste alors à vérifier que cette extension est effectivement ramifiée en  $\mathfrak{p}$  et qu'elle est non décomposée en 2, pour qu'elle réalise la propagation de la 2-birationalité. Or :

- Le premier point est évident, puisque le groupe de Galois  $\text{Gal}(N/K)$  est engendré par l'image du sous-groupe d'inertie de la place  $\mathfrak{p}$ .
- Il reste à voir que la place dyadique  $\mathfrak{l}$  est non décomposée. Pour cela, reprenons le raisonnement précédent en échangeant les rôles de  $\mathfrak{p}$  et de  $\mathfrak{q}$ . Ce faisant, nous obtenons :  $rg_2 \mathcal{C}\ell_{\{\mathfrak{p}\}}^{\{\mathfrak{lq}\}} = 0$ , i.e.  $\mathcal{C}\ell_{\{\mathfrak{q}\}}^{\{\mathfrak{lp}\}} = 1$ ; ce qui est précisément le résultat attendu.

En conclusion, nous retrouvons le fait que pour un couple de places  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{q}$  primitives fixé, il existe une unique extension  $K'/K$  vérifiant les hypothèses du théorème 16 et permettant la propagation de la 2-birationalité.

De ce fait, ce processus peut être réitéré à l'infini et ainsi nous pouvons construire des extensions  $K'$  de  $K$  de degrés arbitrairement grands, disjointes de la  $\mathbb{Z}_2$ -extension cyclotomique, de telle manière que le corps  $L'$  obtenu soit encore 2-birationnel.

## Références

- [1] C. BOURBON, *Propagation de la 2-rationalité*, Thèse, Univ. Bordeaux, 2011.

- [2] G. GRAS, *Théorèmes de réflexion*, J. Théor. Nombres de Bordeaux **10** (1998), 399–499.
- [3] G. GRAS, *Class Field Theory : From Theory To Practice*, Springer-Verlag, 2003.
- [4] G. GRAS & J.-F. JAULENT, *Sur les corps de nombres réguliers*, Math. Z. **202** (1989), 343–365.
- [5] J.-F. JAULENT, *Classes logarithmiques des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1994), 301–325.
- [6] J.-F. JAULENT, *Théorie  $\ell$ -adique globale du corps de classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355–397.
- [7] J.-F. JAULENT & T. NGUYEN QUANG DO, *Corps  $p$ -réguliers, corps  $p$ -rationnels et ramification restreinte*, J. Théor. Nombres Bordeaux **5** (1993), 343–363.
- [8] J.-F. JAULENT & O. SAUZET, *Pro- $\ell$ -extension de corps  $\ell$ -rationnels*, J. Number Th. **65** (1997), 240–267 ; *ibid.* **80** (2000), 318–319.
- [9] J.-F. JAULENT & O. SAUZET, *Extensions quadratiques 2-birationnelles de corps totalement réels*, Pub. Mathématiques **44** (2000), 343–351.
- [10] A. MOVAAHHEDI, *Sur les  $p$ -extensions des corps  $p$ -rationnels*, Math. Nachr. **149** (1990) 163–176.
- [11] A. MOVAAHHEDI & T. NGUYEN QUANG DO, *Sur l'arithmétique des corps de nombres  $p$ -rationnels*, Sémin. Th. Nombres Paris (1987/1988), Prog. in Math. **89** (1990), 155–200.
- [12] F. SORIANO, *Classes logarithmiques ambiges des corps quadratiques*, Acta Arith. **78** (1997), 201–219.
- [13] K. WINGBERG, *On Galois groups of  $p$ -closed algebraic number fields with restricted ramification*, J. reine angew. Math. **400** (1989), 185–202 ; *ibid.* **416** (1991), 187–194.

#### Adresses des auteurs

Claire BOURBON, Univ. Bordeaux, Institut de Mathématiques de Bordeaux,  
UMR CNRS 5251, 351 Cours de la Libération, F-33405 Talence cedex  
`claire.bourbon@math.u-bordeaux1.fr`

Jean-François JAULENT, Univ. Bordeaux, Institut de Mathématiques de Bordeaux,  
UMR CNRS 5251, 351 Cours de la Libération, F-33405 Talence cedex  
`jean-francois.jaulent@math.u-bordeaux1.fr`